10/12/19

Χαρακτηριστικά τμ και κατανομών

(I) Μέση τιμή ή Αναμενόμενη τιμή μιας τ.μ

• <u>Ορισμός:</u> Έστω τμ X. Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της X συμβολίζεται με μ ή με E(x) και ορίζεται ως:

$$\mu = E(x) = \begin{cases} \sum_{x} x \cdot P_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η μ ή E(x) υπάρχει αν το άθροισμα στη διακριτή περίπτωση ή το ολοκλήρωμα στη συνεχή περίπτωση υπάρχουν.

<u>Ερμηνεία του ορισμού:</u>

1) Έστω διακριτή τμ X με τιμές $\{x_1, \dots, x_n\}$ και σπ $P_X\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Έστω $X_{min} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$

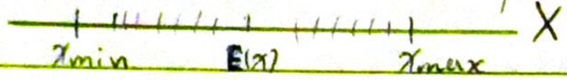
και $X_{max} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

- $E(x) \overset{op}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} x_{max} P_X(x_i) = x_{max} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)}_{1} = x_{max}$

- $E(x) \overset{op}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} x_{min} P_X(x_i) = x_{min} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)}_{1} = x_{min}$

Άρα, $\min x_i \leq E(x) \leq \max x_i$

Δηλαδή, η $E(x)$ είναι κάπου ανάμεσα στις τιμές της X



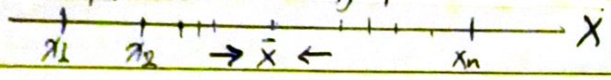
2)

Έστω ομοιόμορφη διακριτή τμ X. Δηλαδή έστω X με τιμές $x_1,\dots,x_n$ και σ.π. $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $\forall i=1,\dots,n$

$$E(x) \overset{\text{op}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} =: \bar{x}$$

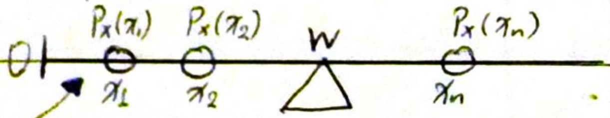
αριθμητικός ή δειγματικός μέσος των $x_1,\dots,x_n$

Δηλαδή, η $E(x)$ βρίσκεται γύρω από το $\bar{x}$.



3) Σύνδεση $E(x)$ με το κέντρο βάρους (και φυσική)

Έστω τμ X με τιμές $x_1,\dots,x_n$ και σ.π $P_X(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$



Βάζω ένα βάρος στο x_1 ίσο με το $P_X(x_1)$ και συνεχίζω με τα άλλα. Βρες το W ώστε αν βάλουμε ένα στήριγμα η ράβδος θα ισορροπεί.

Αφού το W είναι σημείο ισορροπίας:

Ολική Ροπή Στρέψης $= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - w) P_X(x_i) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) - W \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 0$

$\Rightarrow W = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = E(x)$.

Άρα,

Κέντρο βάρους $\equiv E(x) =$ μέση τιμή.

Άσκηση:

Ένα ζάρι ρίχνεται 2 φορές. Έστω η τμ X παριστά το άθροισμα των αποτελεσμάτων και η τμ Y παριστά την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποτελεσμάτων. $E(X)$; $E(Y)$;

Λύση:

(Θα δω αν η X είναι συνεχής ή διακριτή)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Άρα, η X είναι διακριτή

Άρα, η $E(x)$ είναι άθροισμα.

$$E(x) = \sum_{x=2}^{12} x P_X(x) = 7.$$

Y	0	1	2	3	4	5
$P_Y(y)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{5} y P_Y(y) = 1.9444.$$

Άρα, η μέση τιμή δεν είναι κατ' ανάγκη και τιμή της τμ.

Μέση Τιμή Συνάρτησης τ.μ.

• Ορισμός: Έστω τμ X και g μια πραγματική συνάρτηση της τμ X. Η μέση τιμή της $g(x)$ συμβολίζεται με $E[g(x)]$ και ορίζεται:

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x) P_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}.$$

Παρατήρηση: Η $E[g(x)]$ υπάρχει αν υπάρχει το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα

Ιδιότητες της Μέσης Τιμής SOS

Πρόταση: Έστω η τμ X και οι πραγματικές συναρτήσεις g_1 και g_2. Έστω α, β σταθερές. Τότε με την προϋπόθεση ότι οι μέσες τιμές υπάρχουν, ισχύει:

α) $E(\alpha) = \alpha$

β) $E[\alpha g(x) + \beta] = \alpha E[g(x)] + \beta$

γ) $E[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] = \alpha E[g_1(x)] + \beta E[g_2(x)]$

δ) Αν $g(x) \geq 0$, τότε $E[g(x)] \geq 0$

ε) Αν $g_1(x) \geq g_2(x)$, τότε $E[g_1(x)] \geq E[g_2(x)]$

Απόδειξη:

Τετριμμένη γιατί αντίστοιχες ιδιότητες ικανοποιούν το άθροισμα και το ολοκλήρωμα

γ) $E[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] \overset{\text{ορ}}{=} \int (\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) f_X(x)\,dx$

$= \alpha \int g_1(x) f_X(x)\,dx + \beta \int g_2(x) f_X(x)\,dx$

$\overset{\text{ορ}}{=} \alpha E[g_1(x)] + \beta \cdot E[g_2(x)]$

SOS με το να βρω εγώ τις πιθανότητες με σ.α

Άσκηση:

Φοιτητής απαντά στην τύχη σε 3 ερωτήσεις που του δίνονται σωστό ή λάθος. Ο φοιτητής κερδίζει μία μονάδα για κάθε σωστή απάντηση και χάνει μία μονάδα για κάθε λάθος απάντηση.

α) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων;

β) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος;

Λύση:

α) Έστω X αριθμός - πλήθος σωστών απαντήσεων.

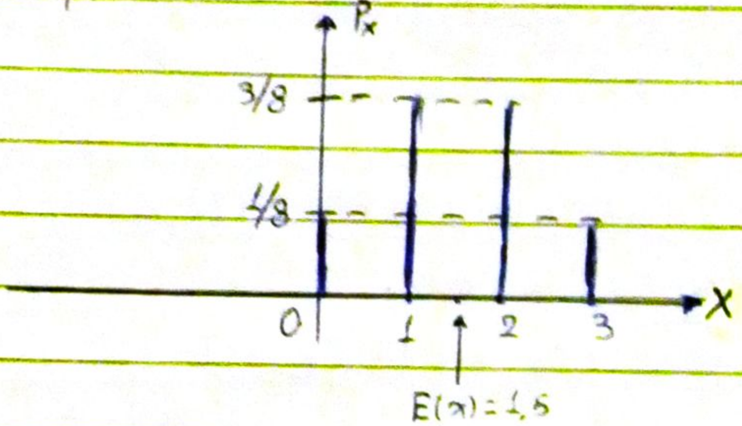
Ζητώ $E(x)$. Αλλά $X \sim B(n=3, p=\frac{1}{2})$

Άρα, $P_X(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-x}$, $x = 0, 1, 2, 3$

$P_X(0) = \frac{1}{8} = P_X(3)$, $P_X(1) = \frac{3}{8} = P_X(2)$

$E(x) = \sum_{x=0}^{3} x P_X(x) = 1,5$

Γραφική παράσταση:



β) Έστω Y το κέρδος με τιμές $y = -3, -1, 1, 3$

$P_Y(-3) = P_X(0) = \frac{1}{8} = P_X(3) = P_Y(3)$

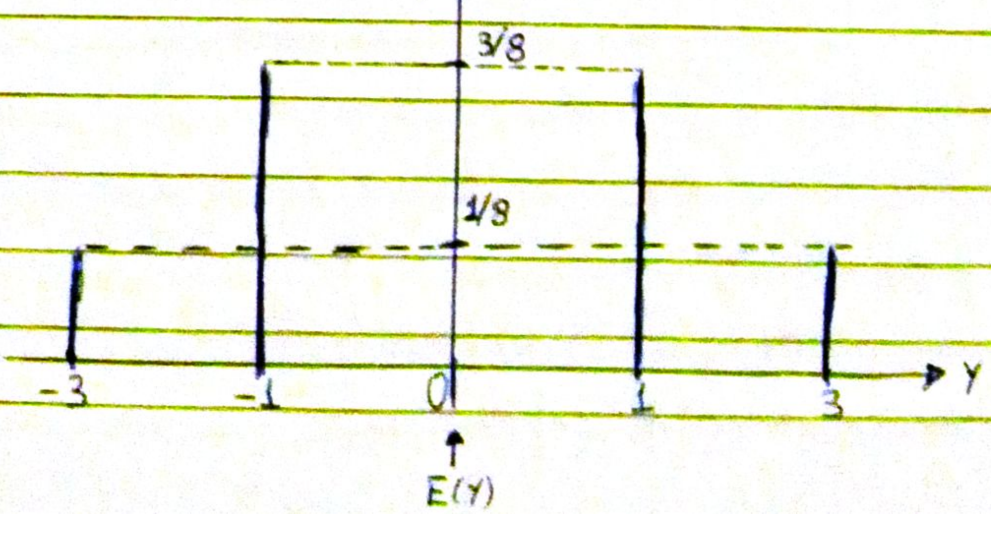
$P_Y(-1) = P_X(1) = \frac{3}{8} = P_X(2) = P_Y(1)$

Συνεπώς,

$$E(Y) = \sum_{y=-3,-1,1,3} y P_Y(y) = 0$$

Αναμενόμενο γιατί η Y παίρνει αντίθετες τιμές με ίσες πιθανότητες. Άρα αλληλο-αναιρούνται.

Γραφική παράσταση:



Διακύμανση ή Διασπορά τμ

• **Ορισμός:** Έστω τμ X με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η διακύμανση ή η διασπορά της τμ X συμβολίζεται με σ^2 ή $Var(X)$ και ορίζεται ως εξής $\sigma^2 = Var(X) \overset{\text{ορ}}{=} E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_{x} (x-\mu)^2 \cdot p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$